第６講　微分法・積分法③　※第６講には【CHECK & UP】はありません.

$\boxed{1}$　座標平面上で，放物線 $y=x^2$ を C とする.

曲線 C 上の点Ｐの x 座標を a とする．点Ｐにおける C の接線 l の方程式は

$$y=\boxed{\text{アイ}}\,x-a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．$a\neq0$ のとき直線 l が x 軸と交わる点をＱとすると，Ｑの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である.

$a>0$ のとき，曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である.

$a<2$ のとき，曲線 C と直線 l および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T=-\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{サ}}\,a^2-\boxed{\text{シ}}\,a+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である.

$a=0$ のときは $S=0$，$a=2$ のときは $T=0$ であるとして，$0\leqq a\leqq2$ に対して $U=S+T$ とおく．a がこの範囲を動くとき，U は $a=\boxed{\text{ソ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとり，

$a=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ をとる.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を正の実数とし，x の２次関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=\frac{1}{8}x^2$，$g(x)=-x^2+3ax-2a^2$ とする．また，放物線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．

(1)　C_1 と C_2 の共有点を P とすると，点 P の座標は $\left(\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}a,\ \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}a^2\right)$ である．また，点 P における C_1 の接線の方程式は

$$y=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}ax-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}a^2$$

である．

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．また，C_2 と x 軸の交点の x 座標は $\boxed{サ}$，$\boxed{シス}$ であり，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}a^3$ である．

(3)　$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，二つの放物線 C_1，C_2 と２直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた図形を R とする．R の中で，$y \geqq 0$ を満たすすべての部分の面積 $S(a)$ は

$0<a\leqq\boxed{タ}$ のとき　$S(a)=-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}a^3+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$

$\boxed{タ}<a\leqq\boxed{チ}$ のとき　$S(a)=-\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}a^3+\boxed{ト}a^2-\boxed{ナ}a+\boxed{ニ}$

$\boxed{チ}<a$ のとき　$S(a)=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$

である．したがって，a が $a>0$ の範囲を動くとき，$S(a)$ は $a=\frac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ で最小値 $\frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハヒ}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[3] 放物線 $y=2x^2$ を C，点 $(1,\ -2)$ を A とする．

点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$u=\frac{x+\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad v=\frac{y-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ．Q が C 上を動くときの点 P の軌跡を D とすると，D は放物線

$$y=x^2+\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}$$

である．

2つの放物線 C と D の交点を R と S とする．ただし，x 座標の小さい方を R とする．

点 R, S の x 座標はそれぞれ $\boxed{\text{キク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ で，点 R, S における放物線 D の接線の方程式はそれぞれ

$$y=\boxed{\text{コ}},\quad y=\boxed{\text{サ}}x-\boxed{\text{シ}}$$

である．

P を放物線 D 上の点とし，P の x 座標を a とおく．P から x 軸に引いた垂線と放物線 C との交点を H とする．$\boxed{\text{キク}}<a<\boxed{\text{ケ}}$ のとき，三角形 PHR の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}a^3+a^2+\boxed{\text{ソ}}a+\boxed{\text{タ}}\right)$$

と表される．$S(a)$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき，最大値をとる．

$a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき，直線 HR と放物線 D の交点のうち，R と異なる点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．このとき，$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ の範囲で，放物線 D と直線 PH および直線 HR で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ナニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　微分法・積分法③

1　$a>0$ とし，直線 $y=2ax$ を l とする．

(1)　点 $(-1,\ 0)$ で x 軸に接する放物線 C_1 が直線 l にも接しているとする．その接点 P の座標は（ ア ， イウ ）であり，C_1 の方程式は

$$y=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}(x+1)^2$$ である．

次に，x 軸に接する放物線 C_2：$y=p(x-q)^2$ が点 P を通り，点 P での接線が直線 l と直交しているとする．このとき，点 P での C_2 の接線の傾きは $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケ}}$ であり，p と q は

$$p=\frac{1}{\boxed{コサ}\,a^{\boxed{シ}}},\quad q=\boxed{ス}+\boxed{セ}\,a^{\boxed{ソ}}$$

である．

(2)　放物線 C_1，x 軸，直線 $x=$ ア で囲まれる部分の面積を S_1 とし，また放物線 C_2，x 軸，直線 $x=$ ア で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1，S_2 は a を用いてそれぞれ

$$S_1=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}a,\quad S_2=\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}a^{\boxed{ナ}}$$

と表される．

したがって，$3S_1=S_2$ となるのは $a=\dfrac{\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$ のときである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $x \geqq 0$ の範囲における関数 $y=x^2$ のグラフを C_1，$x \leqq 0$ の範囲における関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを C_2 とする．実数 a は $0<a \leqq 1$ の範囲にあるとし，C_1 上の点 P の x 座標は a，C_2 上の点 Q の x 座標は $-a$ であるとする．

点 P で C_1 に接する直線 l_1 の方程式は

$$y=\boxed{\text{アイ}}\,x-a^2$$

であり，点 Q で C_2 に接する直線 l_2 の方程式は

$$y=\boxed{\text{ウエ}}\,x-\frac{a^2}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．直線 l_1 と直線 l_2 の交点を R とすると，R の x 座標は $\dfrac{a}{\boxed{\text{カ}}}$ である．点 R は，a の値によらずに放物線 $y=\boxed{\text{キクケ}}\,x^2$ の上にある．

また，l_1，l_2 および y 軸で囲まれた三角形の面積は $\dfrac{a^3}{\boxed{\text{コサ}}}$ である．

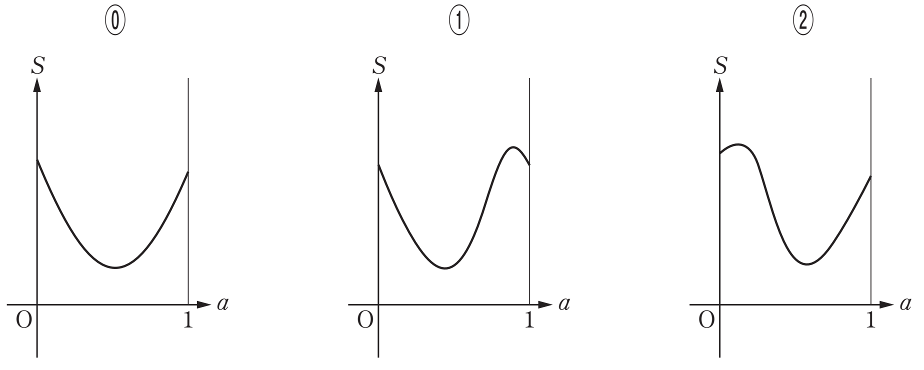
直線 $x=1$ と l_1 の交点を G，直線 $x=-1$ と l_2 の交点を H とおき，2 曲線 C_1，C_2 と 2 線分 RG, RH および 2 直線 $x=1$, $x=-1$ によって囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．このとき

$$S(a)=-\frac{1}{\boxed{\text{コサ}}}a^3+\frac{\boxed{\text{シ}}}{2}a^2-\frac{\boxed{\text{ス}}}{2}a+\frac{\boxed{\text{セ}}}{2}$$

である．$0<a \leqq 1$ の範囲において，$S(a)$ は

$$a=\boxed{\text{ソタ}}-2\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}$$

のときに極小値をとり，関数 $S=S(a)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{テ}}$ である．$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 k を実数とし，$P(x)=x^3-(k+20)x-2k$ とする．

(1) 3次方程式 $P(x)=0$ がただ一つの実数解 α をもつとき，k と α の取り得る値の範囲を求めよう．

座標平面上で，曲線 $y=x^3-20x$ を C，直線 $y=k(x+2)$ を l とする．はじめに，直線 l が C と接するような k の値を求める．直線 l は k の値によらずに定点 A(アイ , ウ) を通る．一方，C 上の点 $(t,\ t^3-20t)$ における曲線 C の接線の方程式は

$y=($ エ t^2- オカ $)x-$ キ t^3

である．この接線が A を通るとすると $t=$ ク である．したがって，A から曲線 C に引いた接線の方程式は

$y=$ ケコ $x-$ サシ

であり，このときの k の値は ケコ である．また，この接線と C との共有点の x 座標は

$x=$ スセ , ソ

である．

方程式 $P(x)=0$ の実数解は曲線 C と直線 l との共有点の x 座標である．したがって，この方程式がただ一つの実数解をもつときの k の取り得る値の範囲は

$k<$ タチ

であり，その実数解 α の取り得る値の範囲は

ツテ $<\alpha<$ トナ

である．

(2) 2曲線 $y=P(x)$，$y=x^3-kx^2-20x$ と2直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積が1となるとき

$k=\pm\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$

である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

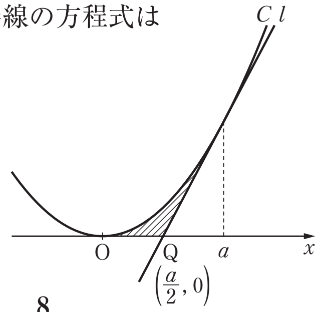
第６講　微分法・積分法③

【CHECK & UP】はありません.

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　$C: y=x^2$　より　$y'=2x$　　C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$y=2a(x-a)+a^2$　　よって　$l: y=\mathbf{2a}x-a^2$

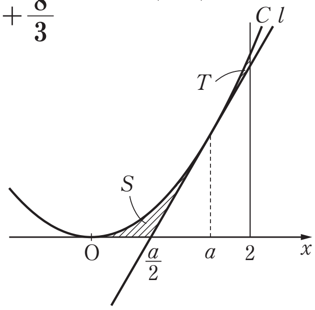


また，放物線の２接線の交点の x 座標は

２接点の x 座標の中点であるので　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$

$a>0$ のとき　$S=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a}{2}\right)^3\times2=\dfrac{a^3}{\mathbf{12}}$

$a<2$ のとき　$T=\dfrac{1}{3}(2-a)^3=-\dfrac{1}{3}(a-2)^3=-\dfrac{1}{\mathbf{3}}a^3+\mathbf{2}a^2-\mathbf{4}a+\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$



$0\leqq a\leqq2$ のとき　$U=S+T$ とおく

$U=\dfrac{a^3}{12}-\dfrac{1}{3}(a-2)^3=-\dfrac{1}{4}a^3+2a^2-4a+\dfrac{8}{3}$

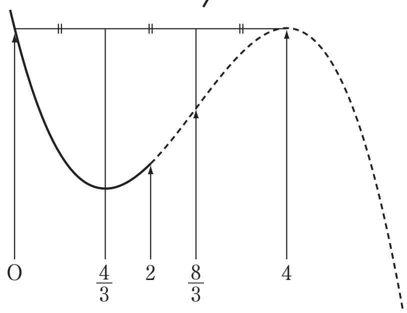
$U'=\dfrac{a^2}{4}-(a-2)^2=-\dfrac{3}{4}a^2+4a-4=-\dfrac{1}{4}(a-4)(3a-4)$

よって，グラフより　$a=\mathbf{0}$ で最大値　$\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$

$a=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ で最小値

$\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{4}{3}\right)^3-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{3}-2\right)^3=\dfrac{16}{81}+\dfrac{8}{81}$

$=\dfrac{24}{81}=\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}$　をとる.



2　$C_1: f(x)=\dfrac{1}{8}x^2$　　$C_2: g(x)=-x^2+3ax-2a^2$　$(a>0)$　軸：$x=\dfrac{3}{2}a>0$

(1)　C_1 と C_2 の交点 P の x 座標は

$\dfrac{1}{8}x^2=-x^2+3ax-2a^2$　　$9x^2-24ax+16a^2=0$　　$(3x-4a)^2=0$　　$x=\dfrac{4}{3}a$（重解）

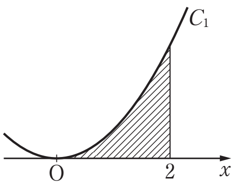
ゆえに　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}a,\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}a^2\right)$

P における C_1 の接線，すなわち C_1 と C_2 の共通接線の傾きは　$f'\left(\dfrac{4}{3}a\right)=\dfrac{1}{3}a$

よって接線の方程式は　$y=\dfrac{1}{3}a\left(x-\dfrac{4}{3}a\right)+\dfrac{2}{9}a^2$　　ゆえに　$y=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}ax-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}a^2$

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot2^3=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$　（$=S$ とする）

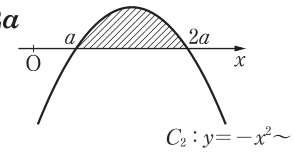


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

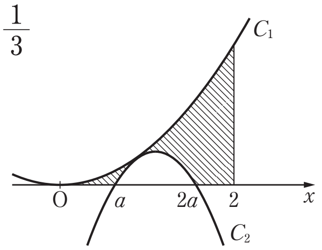
$C_2: y=-(x-a)(x-2a)$　と x 軸の交点の x 座標は　$x=\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{2a}$

よって，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot a^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}}a^3\quad (=T\ とする)$$



(3)　$2a\leqq 2$　つまり　$0<a\leqq \boldsymbol{1}$ のとき　$S(a)=S-T=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}$



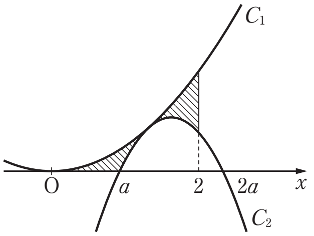
$1<a\leqq \boldsymbol{2}$ のとき

$$S(a)=S-\int_a^2(-x^2+3ax-2a^2)dx$$

$$=\frac{1}{3}-\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3a}{2}x^2-2a^2x\right]_a^2$$

$$=\frac{1}{3}-\left(-\frac{8}{3}+6a-4a^2+\frac{a^3}{3}-\frac{3}{2}a^3+2a^3\right)$$

$$=-\boldsymbol{\frac{5}{6}}a^3+\boldsymbol{4}a^2-\boldsymbol{6}a+\boldsymbol{3}$$



$2<a$ のとき　$S(a)=S=\frac{1}{3}$

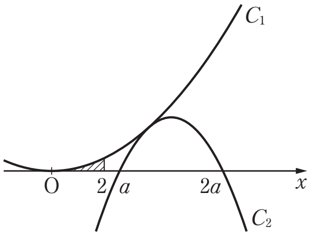
$S(a)$ は $0<a\leqq 1$ のとき単調減少，$2<a$ のとき定数

$1<a\leqq 2$ のとき

$$S'(a)=-\frac{5}{2}a^2+8a-6=-\frac{1}{2}(5a^2-16a+12)$$

$$=-\frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

よって　$a=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$ のとき　最小値　$\boldsymbol{\frac{3}{25}}$



3　Q は線分 AP の中点より　$u=\boldsymbol{\frac{x+1}{2}}$，$v=\boldsymbol{\frac{y-2}{2}}$　が成り立つ.

Q が C 上の点であるとき，$v=2u^2$　これに上の結果を代入して

$$\frac{y-2}{2}=2\cdot\frac{(x+1)^2}{4}\qquad y=(x+1)^2+2$$

よって，点 P は放物線 $D: y=x^2+\boldsymbol{2}x+\boldsymbol{3}$ 上にある.

C と D の交点の x 座標は　$2x^2=x^2+2x+3$　　$x^2-2x-3=0$　$x=\boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{3}$

よって，点 R の x 座標は -1，点 S の x 座標は 3 である.

D で $y'=2x+2$ より　点 R における D の接線の方程式は　$y=\boldsymbol{2}$　であり，

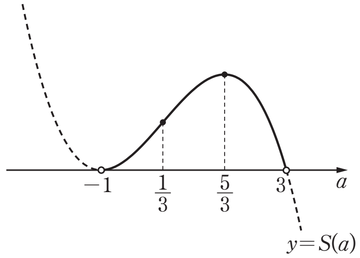
点 S における D の接線の方程式は $y=8(x-3)+18$　つまり　$y=\boldsymbol{8}x-\boldsymbol{6}$　である.

P が放物線 D 上の点 $(a,\ a^2+2a+3)$ にあるときを考える.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$-1<a<3$ のとき

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{PH}\cdot(a+1)=\frac{1}{2}(-a^2+2a+3)(a+1)$$
$$=-\frac{1}{2}(a+1)^2(a-3)$$
$$=\frac{1}{\mathbf{2}}(-a^3+a^2+\mathbf{5}a+\mathbf{3})$$



グラフより　$a=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ のとき最大値をとる.

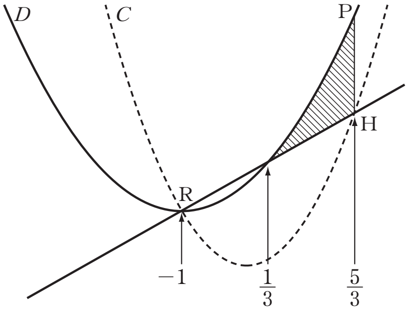
$a=\frac{5}{3}$ のとき　$\mathrm{H}\left(\frac{5}{3},\ \frac{50}{9}\right)$ より　HR：$y=\dfrac{\frac{50}{9}-2}{\frac{5}{3}-(-1)}(x+1)+2=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$

これと，D の交点の x 座標は　$x^2+2x+3=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$　　$x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

この方程式の１解が -1 より，もう１解は　$x=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

したがって，求める面積は

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{(x^2+2x+3)-\left(\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}\right)\right\}dx$$
$$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{125}{27}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{25}{9}-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{124}{27}+\frac{72}{27}-\frac{36}{27}\right)$$
$$=\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{81}}$$

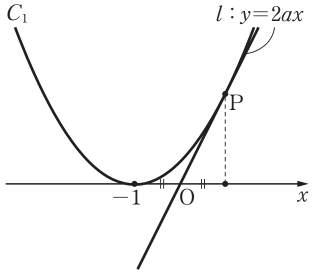


※　$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}\right\}\left(x-\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$=\frac{64}{81}+\frac{96}{81}=\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{81}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　微分法・積分法③



1 (1)　$l:y=2ax\quad a>0$

放物線の２接線の交点の x 座標は，２接点の中央.

よって　C_1 と l の接点Ｐの座標は $(\mathbf{1},\ \mathbf{2a})$ である.

C_1 は題意より $y=k(x+1)^2$ とおける.

これが点Ｐを通るとき，$2a=4k$ より　$k=\dfrac{a}{2}$

よって　$C_1:y=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}(x+1)^2$

次に，$C_2:y=p(x-q)^2$ がＰを通るとき　$2a=p(1-q)^2$　……①

また，C_2 において　$y'=2p(x-q)$

よって，Ｐにおける C_2 の接線の傾きは　$2p(1-q)$

この接線が直線 l と直交するので　$2p(1-q)\cdot 2a=-1$　　$p(1-q)=-\dfrac{1}{4a}$　……②

②を①に代入して　$2a=(1-q)\cdot\left(-\dfrac{1}{4a}\right)$　　$1-q=-8a^2$　　ゆえに　$q=\mathbf{1}+\mathbf{8}a^2$

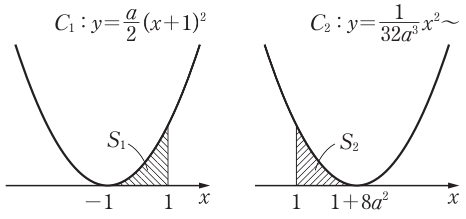
このとき②より　$p\cdot(-8a^2)=-\dfrac{1}{4a}$　　ゆえに　$p=\dfrac{1}{\mathbf{32}a^3}$　　よって，傾きは　$\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2a}}$

(2)　$S_1=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot 2^3=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}a$

$S_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{32a^3}\cdot(8a^2)^3=\dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}a^3$

よって　$3S_1=S_2$　となるのは

$4a=\dfrac{16}{3}a^3$　　$a^2=\dfrac{3}{4}$ より　$a=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$　(>0)

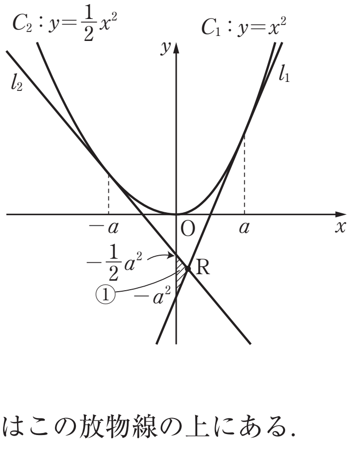


2　$C_1:y=x^2$ より　$y'=2x$　よって，点 $\mathrm{P}(x=a)$ における接線は　$l_1:y=2a(x-a)+a^2=\mathbf{2a}x-a^2$

$C_2:y=\dfrac{1}{2}x^2$ より　$y'=x$　よって，点 $\mathrm{Q}(x=-a)$ における接線は　$l_2:y=-a(x+a)+\dfrac{1}{2}a^2=\boldsymbol{-a}x-\dfrac{1}{\mathbf{2}}a^2$

l_1 と l_2 の交点Ｒの x 座標は　$3ax=\dfrac{1}{2}a^2$ より　$x=\dfrac{a}{\mathbf{6}}$

このとき　$y=-\dfrac{2}{3}a^2$

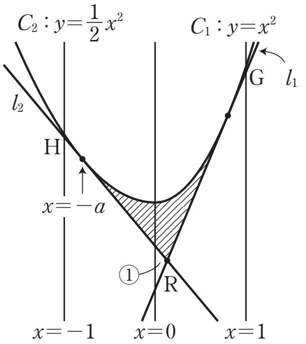


$a=6x$　これを　$y=-\dfrac{2}{3}a^2$ に代入して　$y=\mathbf{-24}x^2$　点Ｒはこの放物線の上にある.

l_1，l_2，$x=0$ で囲まれた三角形の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{a}{6}=\dfrac{a^3}{\mathbf{24}}$　……①

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



$$S(a)=\int_{-1}^{0}\{C_2-l_2\}dx+\int_{0}^{1}\{C_1-l_1\}dx-①$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}(x+a)^2dx+\int_{0}^{1}(x-a)^2dx-①$$

$$=\left[\frac{1}{6}(x+a)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{0}^{1}-①$$

$$=\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{6}(a-1)^3+\frac{1}{3}(1-a)^3-\frac{1}{3}(-a)^3-\frac{1}{24}a^3$$

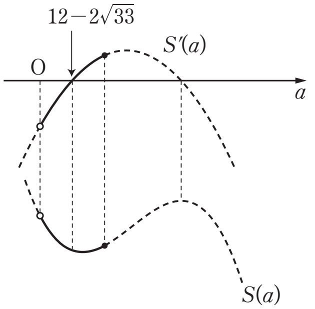
$$=-\frac{1}{\mathbf{24}}a^3+\frac{\mathbf{3}}{2}a^2-\frac{\mathbf{3}}{2}a+\frac{\mathbf{1}}{2}$$

$$S'(a)=-\frac{1}{8}a^2+3a-\frac{3}{2}=-\frac{1}{8}(a^2-24a+12)$$

$a=12\pm2\sqrt{33}$ のとき　$S'(a)=0$

よって　$a=\mathbf{12-2\sqrt{33}}$ のとき極小値をとり，

$S=S(a)$ のグラフの概形は⓪である．



3 (1)　$P(x)=x^3-(k+20)x-2k=0$　より　$x^3-20x=k(x+2)$

直線 $l : y=k(x+2)$ は定点 A$(\mathbf{-2},\ \mathbf{0})$ を通る．

また，$C : y=x(x^2-20)$ は x 軸と $x=0$，$\pm2\sqrt{5}$ で交わる．

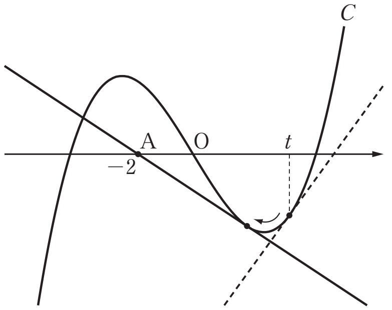
C で　$y'=3x^2-20$ より，C の $x=t$ における接線は

$y=(3t^2-20)(x-t)+t^3-20t$

つまり　$y=(\mathbf{3}t^2\mathbf{-20})x\mathbf{-2}t^3$　これが A を通るとき

$0=(3t^2-20)\cdot(-2)-2t^3$　　$t^3+3t^2-20=0$

$(t-2)(t^2+5t+10)=0$　　ゆえに　$t=\mathbf{2}$



このときの接線は　$y=\mathbf{-8}x\mathbf{-16}=-8(x+2)$　これが A から C に引いた接線であり，$k=-8$ である．

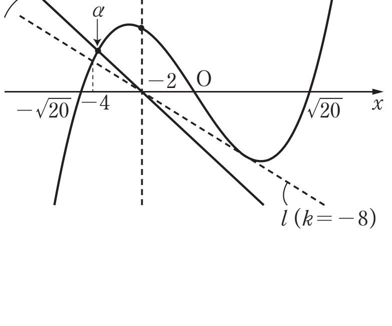
このとき，この接線と C の共有点の x 座標は

$x^3-20x=-8x-16$　　$x^3-12x+16=0$　　$(x-2)^2(x+4)=0$

よって　$x=\mathbf{-4}$，$\mathbf{2}$

方程式 $P(x)=0$ の実数解は曲線 C と直線 l との共有点の x 座標である．したがって，この方程式がただ一つの実数解をもつときの k の取り得る値の範囲は，C と l の共有点が 1 つになるときで，グラフより　$k<\mathbf{-8}$

このときの実数解 α の取り得る値の範囲は，グラフより　　$\mathbf{-4}<\alpha<\mathbf{-2}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$y=P(x)=x^3-(k+20)x-2k$　と　$y=Q(x)=x^3-kx^2-20x$　の交点は

$x^3-(k+20)x-2k=x^3-kx^2-20x$ より

$$k(x^2-x-2)=0$$

よって　$x=-1,\ 2$　($k=0$ は題意を満たさない)

したがって，$1\leqq x\leqq 2$ においてはこの2つのグラフの上下が逆転することはない.

ゆえに　$\left|\int_1^2\{P(x)-Q(x)\}dx\right|=1$　より

$$\left|\int_1^2 k(x^2-x-2)dx\right|=1$$

$$\left|k\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2\right|=1$$

$$\left|k\left\{\frac{1}{3}(2^3-1^3)-\frac{1}{2}(2^2-1^2)-2(2-1)\right\}\right|=1$$

$$\left|-\frac{7}{6}k\right|=1$$　ゆえに　$k=\pm\boldsymbol{\frac{6}{7}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。